CONCURSUL DE MATEMATICĂ „IOAN ARON”

Etapa regională - 21 aprilie 2018, Arad

- clasa a VIII-a -

Subiectul I

Se dau numerele: $N_1 = a + \sqrt{a} + 1$ și $N_2 = b + \sqrt{b} + 1$ cu a,b>0 și a,b $\in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că:

a) Dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ și $\sqrt{ab}$=1, atunci $N_1 + N_2 = N_1 N_2 - 6$

b) Dacă numerele $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{ab}$ sunt rationale, atunci numerele $N_1 + N_2$ și $N_1 N_2$ sunt de asemenea rationale.

c) Există o infinitate de numere naturale pătrate perfecte a și b, astfel încât fracția

$$\frac{a + \sqrt{a} + 1}{b - \sqrt{b} + 1} \in \mathbb{N}$$

Subiectul II

Se consideră un tetraedru ABC D în care AD $\perp$ BC și AB $\perp$ C D. Notăm cu E și F proiecțiile punctului B pe dreptele AD și respectiv AC. Fie M mijlocul segmentului AB și N mijlocul segmentului CD. Arătați că MN $\perp$ EF.

Subiectul III

Să se determine numerele naturale nenule x, y care verifică simultan relațiile:

$$\frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2} + \cdots + \frac{x+2004}{y+2004} = 2005 \qquad (1)$$

și $x^2 + 2004y^2 = 2005$ (2)

Subiectul IV

Piramidele patrulatere regulate $VABCD$ și $SABCD$ au apotemele $[VM]$ și $[SM]$ perpendiculare, M fiind mijlocul lui $[AD]$. Știind că $VS = 2SM$ arătați că $\frac{V_{SABCD}}{V_{VABCD}} = \frac{1}{3}$

Notă: Timpul de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectelor

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.