



COLEGIUL NAȚIONAL „PREPARANDIA-DIMITRIE ȚICHINDEAL” ARAD

310125 Arad, Bd Gen Dragalina nr 5 – 7, tel / fax 0257/281533,
email lpedarad@yahoo.com

Concursul de matematică „Ioan Aron” clasa a VIII-a etapa regională

BAREM

1. a)

$$N_1 + N_2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2 = 30$$

(2puncte)

$$N_1 \cdot N_2 = ab + a + b + \sqrt{ab} + \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} = 36$$

(2puncte)

b)

$N_1 + N_2$ este rațional
(1punct)

$N_1 \cdot N_2$ este rațional
(1punct)

c)

$$\sqrt{a} = m, a = m^2$$

$$\sqrt{b} = n, b = n^2$$

$$n = m + 1$$

Fracția devine

$$\frac{m^2+m+1}{m^2+m+1} = 1 \text{ este natural.}$$

(1punct)

2.

Deoarece AD este perpendiculară pe BC și pe BE , rezultă $AD \perp (BEC)$, de unde $AD \perp CE$. Analog obținem $DF \perp AC$.

(2p)

Fie $\{H\} = CE \cap DF$. Deoarece BH este intersecția planelor (BEC) și

($BF D$), deducem că $BH \perp (ACD)$.

(2p)

Rezultă că proiecția Q a punctului M pe planul (ACD) este mijlocul segmentului $[AH]$.

(1p)

Cercurile circumscrise triunghiurilor AEF și CEF au centrele Q și N . Cum linia centrelor este perpendiculară pe coarda comună, avem $NQ \perp EF$.

(1p)

Deoarece $MQ \perp EF$, rezultă $EF \perp (MQN)$, deci $MN \perp EF$.

(1p)

3. Ecuația (1) se mai scrie :

$$\frac{X}{Y} - 1 + \frac{X+1}{Y+1} - 1 + \dots + \frac{X+2004}{Y+2004} - 1 = 0 \Leftrightarrow (X-Y) \left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y+1} + \dots + \frac{1}{Y+2004} \right) = 0$$

(3 puncte)

$$\Leftrightarrow \frac{X-Y}{Y} + \frac{X-Y}{Y+1} + \dots + \frac{X-Y}{Y+2004} = 0 \Leftrightarrow X=Y=0 \Leftrightarrow X=Y.$$

(2 puncte)

Înlocuind în (2) $\Rightarrow X^2 + 2004 X^2 = 2005 \Rightarrow 2005 X^2 = 2005 \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow X=1$, deoarece $X \in \mathbf{N}$.
Numerele naturale căutate sunt $X=1, Y=1$.

(2 puncte)

4.

Construcția figurii

1p

Notând $SV \cap (ABCD) = \{O\}$ se arată că $SO = h_{SABCD}$, $VO = h_{VABCD}$,

3p

$VO = 3SO$.

$$V_{VABCD} = \frac{A_{ABCD} \cdot VO}{3} = \frac{A_{ABCD} \cdot 3SO}{3} = 3V_{SABCD} \text{ și deci } \frac{V_{SABCD}}{V_{VABCD}} = \frac{1}{3}.$$

3p